Le pianiste Y. Herman et le système Schillinger

Jeux mathématiques et littéraires 2009

Le Noël des matheux

tangente

l'aventure mathématique

n° 125

Courbes planes

Les coniques et le théorème de Dandelin

Les méandres

La courbe du petit déjeuner

Mathématiques japonaises

Wasan et Sangaku

Troublants trous noirs

16 pages de BD offertes !

DOM - LUX - BELG : 6,90 € TUNISIE : 6 DTU MAROC 57 DH
CANADA : 10.50 $ can ISSN 0987-0806 NOV.-DEC. 2008

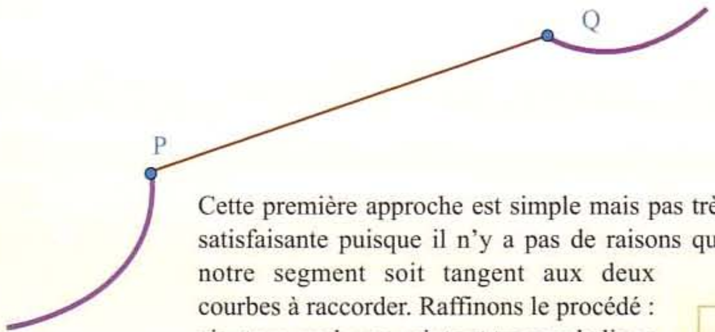
M 05421 - 125 - F: 6,40 € - RD

par Jean-Jacques Dupas

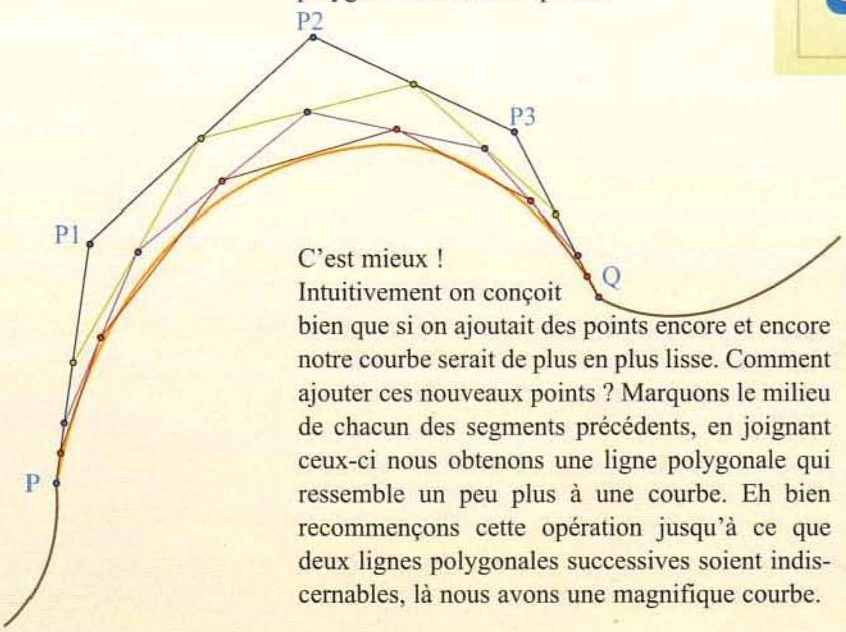
Les lobes de Bézier

Un ingénieur français du XX^e^ siècle, Pierre Bézier, a révolutionné le tracé de courbes grâce à des approximations aux multiples propriétés. Des applications inattendues en sont nées, dans toutes sortes de domaines.

Comment relier deux courbes entre les extrémités P et Q ? La solution triviale est de tracer un segment de droite entre P et Q.



Cette première approche est simple mais pas très satisfaisante puisque il n'y a pas de raisons que notre segment soit tangent aux deux courbes à raccorder. Raffinons le procédé : ajoutons quelques points et traçons la ligne polygonale reliant ces points.



C'est mieux ! Intuitivement on conçoit bien que si on ajoutait des points encore et encore notre courbe serait de plus en plus lisse. Comment ajouter ces nouveaux points ? Marquons le milieu de chacun des segments précédents, en joignant ceux-ci nous obtenons une ligne polygonale qui ressemble un peu plus à une courbe. Eh bien recommençons cette opération jusqu'à ce que deux lignes polygonales successives soient indiscernables, là nous avons une magnifique courbe.

Certes, elle n'est pas encore tangente aux autres aux extrémités mais elle a déjà beaucoup de qualités. Elle est très simple à mettre en œuvre avec de l'informatique, nous n'avons calculé que des milieux de segments. Elle est contrôlée par les points P, P_1, P_2, P_3, Q. Ce qui veut dire que si on déplace un point toute la courbe est modifiée mais surtout autour de ce point. La courbe semble être tangente en P (respectivement Q) au segment [PP_1] (respectivement [P_3Q]). Elle semble se situer dans le polygone convexe défini par P, P_1, P_2, P_3, Q. Nous avons, en fait, un algorithme de construction des courbes de Bézier et toutes les propriétés que nous venons de vous faire remarquer sont vraies, elles se démontrent. Ces courbes ont été découvertes en 1962 par Pierre Bézier (cf. encadré). Vous trouverez dans un autre encadré une définition plus algébrique des courbes. Comme les points d'une courbe de Bézier sont des barycentres des points de contrôle, une trans-

Courbes de Béziers : les plus et les moins

Avantages :

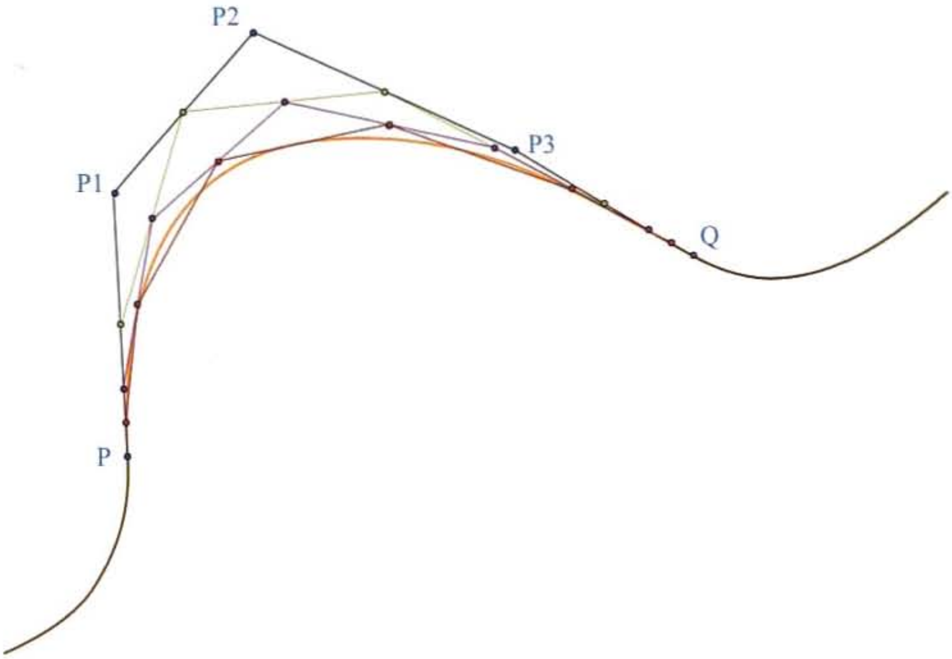
Facile à mettre en œuvre

Une transformation affine (rotation, translation, homothétie, symétries, similitudes, projections…) d'une courbe de Bézier est une courbe de Bézier

Inconvénients :

Les cercles, ellipses ne sont pas des courbes de Bézier

La modification d'un point de contrôle modifie toute la courbe de Bézier formation affine (translation, rotation, projection, homothétie, similitude...) appliquée à une courbe de Bézier donne une nouvelle courbe de Bézier.



+ Des applications multiples

Les courbes de Bézier sont les chevilles ouvrières du dessin vectoriel. Ainsi, les logiciels Postscript (la société Adobe repose sur les courbes de Bézier), Metafont, the Gimp, CorelDraw, Illustrator... utilisent des courbes de Bézier, souvent de degré 3. La plupart des polices de caractères utilisent aussi des courbes de Bézier. Ainsi, les polices TrueType font appel à des courbes de Bézier de degré 2.
Il existe encore des applications aussi universelles que le tracé des carrosseries de voitures. D'ailleurs, pour ces dernières, les « designers » étendent la méthode aux surfaces de l'espace. Quand on vous dit que les mathématiques sont partout...

Mais l'histoire ne s'arrête pas là, les courbes de Bézier reposant sur les polynômes de Bernstein, elles s'inscrivent dans un cadre théorique beaucoup plus vaste et seront généralisées par les b-splines et eux même par les nurbs.

J.-J.D.

Définition d'une courbe de Bézier

Soient P_0, P_1,....P_n n+1 points de contrôle. La courbe de Bézier est définie pour $x \in [0,1]$ par $CourbeBézier_n\ (x) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x)P_i$ $B_{i,n}(x) = C_i^n x^i (1-x)^{n-i}$

et $C_i^n = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

Les $B_{i,n}$ sont les polynômes de Bernstein, définis en 1912 par Serge Bernstein, car les courbes de Bézier s'inscrivent dans un cadre théorique beaucoup plus vaste.
Cela se décline en :
$CourbeBézier_1(x) = (1 - x)P + xQ$
$CourbeBézier_2(x) = (1 - x)^2P + 2t\ (1 - x)\ P_1 + x^2Q$
$CourbeBézier_3(x) = (1 - x)^3P + 3x\ (1 - x)^2\ P_1 + 3x^2\ (1 - x)\ P_2 + x^3\ Q$
....
(On remarquera la ressemblance avec la formule du binôme)

La courbe de Bézier contrôlée par les points P_0, P_1,....P_n passe par P_0 et P_n mais en général pas par les autres points. La courbe est tangente en P_0 (respectivement P_n) à la droite passant par P_0P_1 (respectivement $P_{n-1}P_n$). Notez qu'en modifiant un point on modifie toute la courbe. La courbe est contenue dans l'enveloppe convexe des P_0, P_1,....P_n.

RÉFÉRENCES

• **Les courbes de Bézier, Francis Casiro,** in *Transformations et Fonctions*, Sciences et infos prépas, Ellipses/POLE
• **Pierre Bézier (Pa. 1927), Edmond De Andréa,** in *Arts & Métiers Magazine* n°288, décembre 2005.
• **Pierre de Jumièges, Jean Moreau de Saint Martin,** in *Quadrature*, n°64, Avril-Juin 2007

Pierre Bézier (1910-1999), une histoire de Gadzarts[1]

Pierre Bézier est né le 1er septembre 1910 à Paris, fils de gadzarts, son père Jules Bézier était le major de la promotion Anger 1891. Petit fils d'un presque gadzarts, puisque que son grand-père Jules était entré aux Arts et Métiers d'Anger en 1858 mais en sera exclu pour pensées subversives. Petit neveu du gadzarts Pierre Feuardent de la promotion d'Angers 1842. Il sera gadzarts, major de la promotion Paris 1927. Il ne sortira «que» deuxième, à son grand désespoir ! Il restera très attaché à son école, il deviendra président de la société des Ingénieurs Arts et métiers entre 1977 et 1980; à cette époque il fondera le cercle « Pierre de Jumièges », un de ses pseudonymes (*cf.* encadré suivant).

Il enchainera avec Supélec. Après ces études brillantes il entrera en 1933 chez Renault où il effectuera toute sa carrière. Ajusteur en 1933, chef de section au bureau d'outillage, chef du bureau d'étude mécanique en 1946, directeur des méthodes de fabrication mécanique, directeur de la division machines-outils, directeur à la direction générale en 1960.

La question qui le préoccupait au début des années soixante était comment transformer les courbures des carrosseries en nombres pour permettre aux systèmes informatiques de les manipuler. Car à cette époque naissent les premières machines à commandes numériques. Les carrosseries, elles sont dessinées à la main, comment marier les deux ? Les solutions sont ses courbes et son logiciel Unisurf, l'ancêtre de la CAO, qu'il présenta à Détroit (la Mecque de l'automobile) en 1968. Ce logiciel s'appuyant sur les courbes qu'il a découvertes en 1962.
Ayant du mal à imposer ses idées mathématiques, facétieux, il prétendait tenir ses théories d'un de ses anciens professeurs, le professeur Durand, c'était un autre pseudonyme.
Pierre Bézier à toujours été passionné de mathématiques. Il a donné des cours du soir de 1935 à 1957 (mathématiques, géométrie descriptive) et la retraite venue il obtiendra son doctorat d'état en mathématique avec une thèse portant sur ses courbes en 1977 (Essai de définition numérique des courbes et des surfaces expérimentales, contribution à l'étude des propriétés des courbes et des surfaces paramétriques polynomiales à coefficients vectoriels), il a alors 67 ans.
Chevalier de la légion d'honneur, croix de guerre 39-45, médaille Coons et médaille Gregory de l'ACM (Association for Computer Machinery), il décédera le 25 novembre 1999 à Gallardon (Eure-et-Loir).

Le Cercle Pierre de Jumièges

Saint Pierre de Jumièges est le nom d'une église de l'abbaye de Jumièges, située dans une des boucles de la Seine. Il y a de l'Arsène Lupin dans cette affaire, puisque Maurice Leblanc a longtemps vécu en face de l'Abbaye et qu'elle est le cadre de plusieurs aventures du gentleman cambrioleur. En fait Pierre de Jumièges était un des pseudonymes de Pierre Bézier, était-il fan de Maurice Leblanc ? Je ne saurais dire (moi je le suis) il utilisera comme lui d'autres identités.
Quoi qu'il en soit « Pierre de Jumièges » est le nom du cercle scientifique que fonda Pierre Bézier dans les années 80. Depuis chaque mois les membres se réunissent à l'hôtel de la société des Ingénieurs Arts & Métiers, 9bis avenue d'Iéna, Paris, pour assister à une conférence donnée par un des membres ou un invité. C'est aussi l'occasion de se rencontrer, d'échanger autour de sujets scientifiques. Si les thèmes étaient essentiellement géométriques au début des années 80, aujourd'hui ils sont très variés : astronomie, physique, mécanique, technique… et bien sûr mathématiques. Le cercle à déjà sollicité des orateurs prestigieux comme Etienne Klein, Jean-Pierre Bourguignon, Benoit Rittaud…
Aucun formalisme n'est requis pour en faire partie, sinon le souhaiter, ni cotisation, ni appartenance à une société d'anciens élèves, il est toutefois de tradition de faire une conférence dans un délai raisonnable après son entrée dans le cercle, ne serait-ce que pour sensibiliser ses nouveaux collègues à ses préoccupations scientifiques. Contact Pierre Léger (pierre.leger@gadzats.org)

[1] (Gadzarts : élève de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers ENSAM, dont votre serviteur. « La logique mène à tout… à condition d'en sortir » disait Alphonse Allais, visiblement il en est de même pour les Arts et Métiers)